

EQUATIONS CONSTITUTIVES ET DIRECTEURS DANS LES MILIEUX PLASTIQUES ET VISCOPLASTIQUES†

J. MANDEL

Ecole Nationale Supérieure des Mines, Paris

Résumé—On étudie la structure des relations de comportement d'un milieu élastique–plastique ou élastique–viscoplastique en transformation finie. On montre que les discontinuités qui sont à l'origine de la déformation plastique se traduisent par l'influence de vecteurs directeurs cachés, qu'on fait intervenir par le moyen de :

1. Variables internes dans la définition de l'état ;
2. Un trièdre directeur dans la définition de l'orientation.

La transformation thermoélastique–viscoplastique est décomposée en introduisant une configuration intermédiaire relâchée. Un fait important est que, sauf dans le cas d'isotropie dans les configurations relâchées, les relations de comportement doivent faire intervenir non seulement la vitesse de déformation (et les variables internes) mais encore la vitesse de rotation du trièdre directeur par rapport à l'élément de matière.

1. INTRODUCTION

LA présente étude reprend en partie les considérations présentées dans [1, a, b, c], mais les complète par l'introduction de la notion de *directeurs*, qui nous paraît jouer, au départ, un rôle important lorsque le milieu plastique n'est pas ou ne reste pas isotrope. En particulier cette notion explique pourquoi les différentes configurations relâchées déduites de l'une d'elles, à l'instant, t , par une rotation, ne sont pas équivalentes entre elles, pourquoi il nous a été nécessaire dans [1] de faire intervenir un "trièdre directeur", pourquoi la théorie de A. E. Green et P. M. Naghdi [2] coïncide avec celle de E. H. Lee [3] dans le cas d'un milieu isotrope [4], pourquoi elle n'est en réalité valable que dans ce cas. En outre, le trièdre directeur clarifie la question du critère d'écoulement d'un corps anisotrope et précise la vitesse de contrainte à faire intervenir dans les relations de comportement.

Il n'est pas question ici de formuler avec précision les relations valables pour tel et tel matériau plastique ou viscoplastique. Notre but est de chercher dans quel cadre, physiquement correct et mathématiquement cohérent, doivent s'insérer ces relations, c'est-à-dire d'étudier leur structure.‡

Le cadre le plus général et le plus correct serait celui d'une représentation fonctionnelle, introduisant toute l'histoire des variables observables. Les difficultés d'une telle représentation nous conduisent à lui substituer la représentation par les variables cachées. Nous postulons que l'état thermodynamique actuel peut être défini par la donnée des variables observables (déformations, température) et des valeurs actuelles d'un certain nombre de variables cachées, que nous appellerons variables d'écrouissage, en lesquelles se trouve en quelque sorte condensée l'influence de l'histoire passée.

Un fait très important est que, pour les milieux plastiques anisotropes, l'introduction de variables internes cachées exige aussi celle d'un trièdre caché dont la vitesse de rotation

† Communication au 13ème Congrès International de Mécanique théorique et appliquée (Moscou).

‡ Nous ne ferons même pas allusion ici aux notions de potentiel plastique et potentiel viscoplastique (cf. 1b), malgré leur grand intérêt.

n'est pas liée au gradient de la transformation du macroélément. L'intervention d'un tel trièdre, que nous appelons trièdre directeur, est liée au fait que la déformation plastique résulte de discontinuités des déplacements ou des rotations entre les microéléments orientés dont la réunion forme le macroélément.† Le milieu plastique est un milieu à directeurs non matériels, i.e. qui ne subissent pas la même transformation que l'élément macroscopique. Toutes les théories de plasticité antérieurement formulées ont ignoré ce fait et de la sorte ne sont valables (en transformation finie) que pour les milieux isotropes.

2. LES CORPS ELASTIQUES-VISCOPLASTIQUES

Ce sont les corps pour lesquels on peut définir à chaque instant, dans l'espace des contraintes, un domaine élastique borné tel que si la contrainte reste intérieure à ce domaine les déformations sont réversibles, quelle que soit leur vitesse.

Lorsque la contrainte sort de ce domaine, des déformations permanentes, dites plastiques, se produisent. A ce moment la contrainte dépend du trajet de déformation et en général de la vitesse à laquelle il est décrit (corps viscoplastiques). La plasticité classique (non visqueuse) correspond au cas d'une contrainte indépendante de la vitesse de description du trajet.

La frontière élastique se modifie au cours du temps sous l'effet de deux causes :

1. Les perturbations introduites par la déformation plastique (c'est l'*écrouissage*);
2. Des remaniements lents qui s'opèrent même en l'absence de déformation plastique et même en l'absence de toute déformation (c'est le *radoucissement* ou restauration). Il est nécessaire de tenir compte du radoucissement pour expliquer un certain nombre de phénomènes: diminution, au cours d'une période de repos, de la limite élastique obtenue après une déformation plastique, fluage à vitesse constante sous contrainte constante, hésitation (arrêt temporaire du fluage à la suite d'une décharge). Les relations que nous poserons tiendront compte *simultanément* de l'écrouissage et du radoucissement.

3. CINEMATIQUE DE LA TRANSFORMATION ELASTIQUE-VISCOPLASTIQUE

Soit (0) la configuration occupée par un élément macroscopique de matière à l'instant 0, sous contrainte nulle et à la température T_0 , (a) la configuration qu'il occupe à l'instant actuel t sous une contrainte σ et à la température T . On introduit [1] une configuration intermédiaire (κ) dite configuration relâchée actuelle, en supposant qu'à l'instant t on décharge rapidement l'élément et on le ramène à sa température initiale. La configuration (κ) n'est définie qu'à une rotation près.

Soit \mathbf{F} le gradient de la transformation complète $0 \rightarrow a$, \mathbf{P} celui de la transformation dite plastique $0 \rightarrow \kappa$, \mathbf{E} celui de la transformation élastique $\kappa \rightarrow a$.‡ On a :

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{P} \quad (3.1)$$

$$\text{grad } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}^{-1} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{D} = \{\text{grad } \mathbf{v}\} = \{\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}\} + \{\mathbf{E}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}^{-1}\} \quad (3.3)$$

† Toute description non lagrangienne du comportement d'un milieu anisotrope introduit nécessairement un trièdre directeur qui fixe l'orientation. C'est vrai même pour un milieu élastique. Dans le cas actuel, l'introduction de directeurs est nécessaire *même en description lagrangienne* (cf. n° 8 et 9C) à cause des discontinuités.

‡ On peut objecter que dans certaines conditions, la transformation réelle par décharge rapide pourrait comporter des déformations plastiques de sens opposé aux déformations à la charge. Dans un tel cas, il faudrait considérer une décharge *virtuelle* suivant le comportement thermoélastique.

\mathbf{v} désigne la vitesse, $\text{grad } \mathbf{v}$ son gradient par rapport aux coordonnées actuelles \mathbf{x} , \mathcal{D} la vitesse de déformation (rapportée à la configuration actuelle), $\{ \}$ la partie symétrique d'un tenseur.

Chacun des termes du deuxième membre de 3.2 ou 3.3 dépend de la configuration relâchée choisie, plus exactement de la façon dont elle varie entre t et $t + dt$. En effet, si $\mathbf{E}' = \mathbf{E}\mathbf{V}$ (\mathbf{V} orthogonal), on a :

$$\dot{\mathbf{E}}'\mathbf{E}'^{-1} = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}'\mathbf{E}^{-1} \quad (3.4)$$

où t = transposé.

C'est seulement pour un choix bien déterminé du mouvement de la configuration κ que l'expression "vitesse de déformation élastique" pour le terme $\{\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}\}$ du second membre de 3.3 peut avoir un sens physique (encore n'est-ce pas toujours le cas). C'est ce qui résultera de l'étude thermodynamique faite au n° 6.

4. LE MILIEU PLASTIQUE EST UN MILIEU A DIRECTEURS

La déformation plastique est le résultat de discontinuités des déplacements ou des rotations entre les microéléments dont la réunion constitue le macroélément. Par microélément nous entendons un domaine dans lequel il n'y a pas de discontinuité. A titre d'exemple, un élément macroscopique d'un sable contient un grand nombre de grains entre lesquels se produisent des glissements et des rotations relatives : les grains sont les microéléments.

Au centre d'un microélément, nous pouvons attacher trois vecteurs \mathbf{d}_0^k dans la configuration initiale, qui deviennent \mathbf{d}_a^k dans la configuration actuelle. Ces vecteurs \mathbf{d}_0 , \mathbf{d}_a sont appelés vecteurs directeurs (respectivement dans la configuration 0 et dans la configuration a). Il y a autant de triplets de directeurs que de microéléments dans un macroélément donné. Ces vecteurs ne subissent pas (à cause des discontinuités des déplacements et des rotations) la même transformation que les lignes matérielles qui joignent les centres de microéléments. C'est en cela que le milieu plastique diffère du milieu continu classique. On doit le concevoir un peu comme un milieu de Cosserat [5], dans lequel les microéléments ont une rotation différente de la rotation globale du macroélément.

Cependant il ne s'agit pas ici d'un milieu élastique. La rotation relative de deux microéléments contigus est rendue possible par les discontinuités et n'implique pas l'existence de couples de contraintes. Par exemple deux grains de sable contigus peuvent tourner l'un par rapport à l'autre ; on sait qu'il existe en leur point de contact des couples résistant à la rotation relative mais ils sont tout à fait négligeables. Dans le cas de grains d'un métal, sans méconnaître la possibilité de couples de contraintes [6], il paraît légitime de les négliger en première approximation à l'échelle de l'élément polycristallin.

Il faut observer en outre que les rotations des microéléments sont déterminées par l'histoire de la déformation du macroélément et de la température T . Ce sont donc, lorsqu'on adopte une représentation fonctionnelle du comportement, des fonctionnelles de T et du gradient \mathbf{F} de la transformation du macroélément, et non des variables indépendantes.

De la sorte, le milieu plastique reste (en première approximation) un milieu matériellement simple, i.e. un milieu dans lequel le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonctionnelle de T et du gradient \mathbf{F} et non de leurs dérivées spatiales.

Le rôle des directeurs disparaît donc dans la représentation fonctionnelle. C'est dans la représentation au moyen des variables observables et cachées actuelles qu'il va apparaître, les directeurs étant alors des variables cachées.

5. VARIABLES D'ECROUISSAGE ET REPERE DIRECTEUR

On suppose que par rapport à certains axes, l'état thermodynamique de l'élément de matière peut être défini par les variables suivantes :

Δ tenseur de déformation de Green dans le passage de (κ) à (a) .†

$$\Delta = \frac{1}{2}(\mathbf{E}'\mathbf{E} - \mathbf{I}) \quad (5.1)$$

T température (absolue)

α_j variables d'écroissage, variables internes cachées, scalaires ou tensorielles.

On peut aussi prendre comme variables T, α_j et :

π tenseur des contraintes de Kirchhoff par rapport à la configuration κ , lié au tenseur de Cauchy σ par :

$$\pi = (\det \mathbf{E})\mathbf{E}^{-1}\sigma\mathbf{E}'^{-1}. \quad (5.2)$$

L'hypothèse des variables d'écroissage implique l'existence d'une suite privilégiée de configurations relâchées, ou encore d'un (au moins) repère privilégié D pour les configurations relâchées, distinct du repère du mouvement. Un tel trièdre sera appelé *trièdre directeur*, parce que sa position précise l'orientation de l'élément de matière.

En effet prenons un autre repère S dont D se déduit par la transformation orthogonale :

$$\xi = \beta(t)\hat{\xi} \quad (5.3)$$

(l'accent $\hat{}$ est réservé aux grandeurs relatives à D). Les tenseurs deviennent :

$$\Delta = \beta\hat{\Delta}\beta' \rightarrow \hat{\Delta} = \beta'\Delta\beta.$$

Donc l'état thermodynamique est maintenant défini par Δ, T, α_j et β . β correspond à l'orientation, qui évidemment intervient s'il n'y a pas isotropie dans les configurations relâchées.

Toutefois, si l'on prend pour β une fonction des α_j , $\beta = g(\alpha_j)$, l'état est à nouveau défini par les seules variables Δ, T, α_j . Ceci montre que le repère directeur n'est pas unique et qu'il y a une grande latitude pour son choix.

Soit f une fonction scalaire de l'état thermodynamique. Si l'on prend des configurations relâchées telles que le trièdre D conserve une orientation fixe, configurations que nous appellerons *isoclines* :

$$f = \hat{f}(\hat{\Delta}, T, \hat{\alpha}_j) \quad (5.4)$$

† Il pourrait sembler plus commode d'adopter une description lagrangienne, i.e. de se rattacher à une configuration fixe, comme ont fait A. E. Green et P. M. Nagdhi [2], P. Perzyna [7]. C'est évidemment possible, mais à condition d'introduire la transformation subie par trois vecteurs directeurs (de sorte qu'en général, on ne gagne pas en simplicité). En effet, à cause des discontinuités à l'intérieur du macroélément, les déformations globales par rapport à une configuration fixe ne permettent pas de définir l'état de cet élément, à moins qu'il n'y ait isotropie statistique dans toutes les configurations relâchées.

est fonction seulement des variables thermodynamiques internes.

Avec d'autres configurations relâchées :

$$\mathbf{f} = \hat{f}(\boldsymbol{\beta}'\Delta\boldsymbol{\beta}, T, \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\beta}) = f(\Delta, T, \boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}) \quad (5.5)$$

n'est plus fonction seulement des variables thermodynamiques *internes*,[†] à moins qu'elle soit isotrope, ou que $\boldsymbol{\beta}$ soit simplement une fonction des $\boldsymbol{\alpha}_j$. Cette dernière hypothèse correspond au remplacement d'un trièdre directeur par un autre (noter que la forme de la fonction \hat{f} est changée).

Dans un monocristal les variables d'écroutissage sont les variables qui définissent la distribution des dislocations (densité de dislocations, densité de boucles de dislocation) et plus généralement des défauts du réseau atomique. Un trièdre directeur naturel est un trièdre attaché au réseau, trièdre défini par un plan atomique et une direction atomique dans ce plan.

Soit maintenant un élément polycristallin formé de N cristaux. Nous le déchargeons. Dans la configuration relâchée κ du macroélément, il subsiste des contraintes résiduelles dans les cristaux. Ces contraintes résiduelles constituent une première catégorie de variables d'écroutissage.[‡] De plus pour chacun des monocristaux nous avons :

(a) ses variables d'écroutissage propres (variables internes liées aux dislocations);

(b) trois vecteurs directeurs attachés à son réseau atomique, comme indique ci-dessus. Les trois vecteurs attachés au réseau de l'un (quelconque) des cristaux peuvent constituer un trièdre directeur pour le polycristal, les positions des autres directeurs dans cette base étant des variables d'écroutissage ($3N-3$ variables internes scalaires indépendantes).

Il est préférable§ de prendre un trièdre directeur dont l'orientation définisse une moyenne (pondérée par les volumes) des orientations des divers réseaux atomiques.¶ Pour cela, ayant choisi dans chaque cristal et dans l'état initial trois vecteurs directeurs $\mathbf{d}_1^0, \mathbf{d}_2^0, \mathbf{d}_3^0$, nous prenons dans l'état relâché actuel les positions moyennes sur la sphère trigonométrique des traces des \mathbf{d}_1 , des \mathbf{d}_2 et des \mathbf{d}_3 , d'où un triangle $I_1I_2I_3$ dont un sommet et un côté adjacent permettent de définir un trièdre directeur du polycristal (par exemple le trièdre directeur dont le 1er axe est OI_1 et le 2ème se trouve dans le plan OI_1I_2). Comme ce choix ne fait pas jouer le même rôle aux trois sommets, on peut proposer la définition suivante. Considérons le tétraèdre $OI_1I_2I_3$, d'abord dans l'état initial, puis dans l'état relâché actuel. On peut passer d'une position à l'autre de ce tétraèdre par une affinité, donc par une rotation suivie d'une déformation pure. La rotation définit à chaque instant un trièdre directeur.

Dans l'état initial, le choix des directeurs et de leur sens présente un certain arbitraire, d'ailleurs utile. Par exemple, on peut convenir de prendre \mathbf{d}_i^0 ($i = 1, 2, 3$) de sens tel que

[†] Un trièdre directeur est un trièdre caché dans l'élément de matière macroscopique. L'introduire revient à séparer l'ensemble des variables cachées en variables $\boldsymbol{\alpha}_i$ fixant l'état interne et variable $\boldsymbol{\beta}$ fixant l'orientation. C'est seulement dans le cas d'isotropie dans les configurations relâchées que son introduction est inutile.

[‡] Non indépendantes entre elles (équations d'équilibre).

[§] Préférable, mais nullement obligatoire. L'avantage de ce trièdre est que les coefficients d'élasticité ne dépendent pas ou ne dépendent que très peu des paramètres $\boldsymbol{\alpha}$ (cf. n° 6).

[¶] La part d'arbitraire qui existe dans la définition du trièdre directeur s'explique par la possibilité de remplacer $\boldsymbol{\beta}$ par $g(\boldsymbol{\alpha}_j)$.

[¶] A titre d'exemple, soit un élément formé de trois cristaux a, b, c , à deux dimensions pour simplifier, de surfaces s_a, s_b, s_c . Dans chacun d'eux un seul directeur suffit. Soit $\mathbf{d}_a, \mathbf{d}_b, \mathbf{d}_c$ ces directeurs. Un repère directeur peut être attaché soit à \mathbf{d}_a , soit à \mathbf{d}_b , soit à \mathbf{d}_c , soit à leur somme pondérée $s_a\mathbf{d}_a + s_b\mathbf{d}_b + s_c\mathbf{d}_c$. Les angles $\mathbf{d}_a, \mathbf{d}_b$, et $\mathbf{d}_b, \mathbf{d}_c$ (ou $\mathbf{d}_a, \mathbf{d}_c$) sont des variables internes.

sa ième coordonnée d_{ii}^0 soit positive, de telle manière que les moyennes de ces d_{ii}^0 ne soient pas nulles et que les points moyens soient certainement définis. S'il y a isotropie statistique dans l'état initial, I_1^0 sera alors suivant le 1er axe, I_2^0 suivant le 2ème axe, etc. Ensuite, les sens des vecteurs \mathbf{d} ne sont plus arbitraires, de sorte que, si l'isotropie subsiste, elle n'empêche pas le trièdre directeur de tourner. Elle entraîne seulement que la vitesse de rotation du trièdre directeur coïncide avec celle de l'élément lorsque le choix du trièdre directeur respecte l'équivalence des divers vecteurs directeurs, ce qui est le cas pour la dernière définition proposée. Dans ce cas, le trièdre directeur est *corotationnel* à l'élément.

6. ETUDE THERMODYNAMIQUE

Soit u l'énergie interne, s l'entropie, $\varphi = u - Ts$ l'énergie libre, par unité de masse. En utilisant des configurations relâchées isoclines, u, s, φ sont des fonctions de Δ, T, α_k . Donc, par exemple :

$$\dot{\varphi} = \text{tr} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \Delta} \dot{\Delta} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \dot{T} + \text{tr} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j \right) \quad (6.1)$$

$\partial \varphi / \partial \Delta$ désigne le tenseur de coordonnées $\partial \varphi / \partial \Delta_{ij}$ et tr la trace.

Utilisons l'inégalité de la puissance dissipée† (puissance transformée en chaleur) :

$$\phi = \text{tr} \left(\frac{\sigma \mathcal{D}}{\rho} \right) - (\dot{\varphi} + s\dot{T}) \geq 0 \quad (6.2)$$

ρ est la masse volumique actuelle.

Le 1er terme du 2ème membre de 6.2 (puissance des contraintes par unité de masse) s'écrit encore (en utilisant 5.2, 3.3 et 5.1) :

$$\mathfrak{B} = \text{tr} \left(\frac{\pi}{\rho_\kappa} \dot{\Delta} \right) + \text{tr} \left(\frac{\pi}{\rho_\kappa} \mathbf{E}' \mathbf{E} \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \right). \quad (6.3)$$

La déformation Δ a été définie en imaginant une décharge élastique très rapide (donc sans variation des α_j) de la configuration (a) à la configuration (κ). Dans ce cas $\phi = 0$, $\dot{\mathbf{P}} = 0$, $\dot{\alpha} = 0$ et on déduit de 6.2 :

$$\frac{\pi}{\rho_\kappa} = \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta}, \quad s = -\frac{\partial \varphi}{\partial T}.$$

Le premier terme de la puissance des contraintes :

$$\mathfrak{B}_1 = \text{tr} \left(\frac{\pi \dot{\Delta}}{\rho_\kappa} \right) = \text{tr} \left(\frac{\sigma \dot{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1}}{\rho} \right)$$

est donc égal d'après 6.1 au taux d'accroissement de l'énergie libre du fait de la variation de Δ . On note toutefois que cette expression n'a pas un sens physique bien déterminé puisque $\dot{\Delta}$ dépend du trièdre directeur choisi.

† Elle se déduit de l'inégalité de Clausius-Duhem, expression générale du deuxième principe de la thermodynamique, en prenant $\text{grad } T = 0$.

Supposons que, pour un certain trièdre directeur, φ puisse mettre sous la forme :

$$\varphi(\Delta, T, \alpha_j) = \varphi_1(\Delta, T) + \varphi_2(T, \alpha_j) \quad (6.4)$$

$\varphi_1(\Delta, T)$ est l'énergie libre récupérable par décharge, φ_2 l'énergie libre "bloquée" (correspondant aux dislocations et aux contraintes résiduelles). L'hypothèse signifie que, par rapport au trièdre directeur en question, les coefficients d'élasticité sont indépendants de l'écroutissage.

Dans ce cas \mathfrak{P}_1 est égal au taux d'accroissement de l'énergie libre *récupérable* et $\dot{\Delta}$ peut être appelé vitesse de déformation élastique par rapport à la configuration relâchée. Par rapport à la configuration actuelle, cette vitesse devient :

$$\mathcal{L}_{el} = \{\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}\}. \quad (6.5)$$

La relation 3.4 montre qu'avec un autre choix de configurations relâchées (non liées à un trièdre directeur) ou un autre choix de trièdre directeur, l'expression 6.5 n'a plus la même signification physique précise.†

Quant au 2ème terme de la puissance des contraintes, il est égal d'après 6.2 à $\phi + tr[(\partial\varphi/\partial\alpha_j)\dot{\alpha}'_j]$. Donc, dans le cas envisagé ci-dessus, la puissance dépensée dans la déformation plastique est la somme de la puissance dissipée et du taux de variation (à $T = Cte$) de l'énergie libre bloquée φ_2 .

Si, pour un repère directeur, les variables Δ et α_j se séparent dans φ suivant 6.4, il n'en est pas de même pour un autre repère directeur, puisque d'après 5.5 :

$$\varphi'(\Delta, T, \alpha_j) = \varphi(\beta^i \Delta \beta_i, T, \beta^i \alpha_j \beta_i) \quad \text{avec } \beta = g(\alpha_j).$$

Le cas envisagé est évidemment particulier. Dans le cas général il y a, dans la fonction φ , couplage entre Δ et les α_j , quel que soit le trièdre directeur utilisé. Le taux de variation de l'énergie libre bloquée (celle qui subsiste dans la configuration relâchée) étant (à $T = Cte$) :

$$tr \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_j} (0, T, \alpha_k) \dot{\alpha}'_j \right]$$

le taux de variation de l'énergie libre récupérable est alors :

$$tr \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \Delta} (\Delta, T, \alpha_j) \dot{\Delta} \right] + tr \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_j} (\Delta, T, \alpha_k) - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_j} (0, T, \alpha_k) \right) \dot{\alpha}'_j \right]$$

différent de \mathfrak{P}_1 (égal au 1er terme). Cependant la différence reste faible si le trièdre directeur est choisi comme nous l'avons fait pour le monocristal et pour le polycristal (N° 5 in fine).

Au surplus l'aspect énergétique ne joue aucun rôle dans la suite. C'est pourquoi nous pourrions sans inconvénient donner à l'expression 6.5 le nom de vitesse de déformation élastique lorsqu'elle est relative à un trièdre directeur (en retenant toutefois qu'elle n'est pas indépendante du trièdre directeur choisi).

† A moins qu'il y ait isotropie dans les configurations relâchées. Dans ce cas σ est une fonction isotrope de $\mathbf{E}\mathbf{E}'$, donc $\mathbf{E}^{-1}\sigma\mathbf{E}$ est symétrique, d'où $tr(\sigma\mathbf{E}\mathbf{V}\mathbf{V}'\mathbf{E}^{-1}) = 0$.

7. DERIVEES PAR RAPPORT A t DANS LE MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPERE DIRECTEUR

Au n° 6, on a utilisé des configurations relâchées isoclines. En fait ce choix, commode, n'est pas indispensable. Ce qui importe c'est de prendre les dérivées par rapport à t des grandeurs tensorielles attachées à la configuration κ , non dans le mouvement de κ par rapport aux axes fixes S , mais dans son mouvement par rapport au trièdre D . Du même coup se trouve résolue la question, restée obscure en plâsticité classique, de la dérivée à introduire dans les relations de comportement : dérivée de Jaumann, dérivée de Truesdell ... ? Réponse : il faut prendre la dérivée dans le mouvement par rapport au trièdre directeur D .†

Si D se déduit des axes S par la transformation 5.3, sa vitesse de rotation par rapport aux axes S a pour matrice dans ces axes :

$$\omega_D = \dot{\beta}\beta^{-1}$$

et les dérivées par rapport à t , mais dans le mouvement par rapport à D , de grandeurs tensorielles attachées à κ et repérées dans S sont :

$$\text{pour un vecteur } \mathbf{v} \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \dot{\mathbf{v}} - \omega_D \mathbf{v}$$

$$\text{pour un tenseur du 2ème ordre } \mathbf{u} \quad \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \dot{\mathbf{u}} - \omega_D \mathbf{u} + \mathbf{u} \omega_D$$

$\dot{\mathbf{v}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ sont les dérivées dans le mouvement de κ par rapport aux axes S . Ces dérivées dépendent de la suite des configurations κ choisies, ou ce qui revient au même, pour une suite donnée, du mouvement du repère S . Au contraire les dérivées D/Dt sont *objectives*, i.e. indépendantes du repère du mouvement (quoiqu'elles dépendent du repère directeur choisi — ces deux repères doivent être bien distingués).

La dérivée d'une fonction scalaire, qui maintenant dépend de Δ , T , α_j et $\beta(t)$, mais vérifie la relation 5.5, est donnée par :

$$\dot{f} = \text{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta} \frac{D\Delta}{Dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} + \text{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \frac{D\alpha_j}{Dt} \right)$$

et toutes les relations contenant des vitesses (N° 3 et 6) se transposent immédiatement.

La vitesse de déformation s'écrit, au lieu de 3.3 :

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{D\mathbf{E}}{Dt} \mathbf{E}^{-1} \right\} + \left\{ \mathbf{E} \frac{D\mathbf{P}}{Dt} \dot{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{E}^{-1} \right\}$$

et les deux termes du deuxième membre sont maintenant indépendants du choix de la configuration κ .‡ Le premier est la vitesse de déformation élastique.

8. FRONTIERE ELASTIQUE ET FRONTIERE DE PLASTICITE INSTANTANEE

Soit π le tenseur de Kirchhoff relatif à une configuration relâchée κ pour laquelle le trièdre directeur utilisé se déduit des axes fixes S par la transformation orthogonale 5.3.

† Par rapport au trièdre D choisi pour exprimer l'énergie libre et le critère d'écoulement.

‡ Dans les changements de la configuration κ , \mathbf{E} et \mathbf{P} qui ne se rattachent à κ que par un de leurs indices (le premier pour \mathbf{P} , le deuxième pour \mathbf{E}) ne se transforment pas comme des tenseurs. \mathbf{P} et \mathbf{E}' se transforment comme des vecteurs.

D'après la définition du corps élastique-viscoplastique, il existe à chaque instant dans l'espace π, T un domaine :

$$G(\pi, T, \alpha_j, \beta) < 0 \quad (8.1)$$

éventuellement réduit à une ligne, tel que si le point π, T se trouve dans ce domaine aucune déformation plastique ne se produit, et un domaine plus étendu :

$$f(\pi, T, \alpha_j, \beta) < 0 \quad (G < 0 \Rightarrow f < 0) \quad (8.2)$$

éventuellement l'espace π, T tout entier tel que, si le point π, T se trouve dans ce domaine aucune déformation plastique *instantanée* n'est possible.

L'hypersurface $G = 0$ est la frontière élastique, l'hypersurface $f = 0$ la frontière de plasticité instantanée.

Si l'on utilise des configurations isoclines $\hat{\kappa}$, G et f deviennent des fonctions de $\hat{\pi}, T, \hat{\alpha}_j$ de sorte que 8.1 et 8.2 deviennent :

$$\hat{G}(\hat{\pi}, T, \hat{\alpha}_j) < 0 \quad (8.1')$$

$$\hat{f}(\hat{\pi}, T, \hat{\alpha}_j) < 0. \quad (8.2')$$

On voit que la notion de trièdre directeur permet de clarifier la question du critère d'écoulement d'un corps anisotrope, question qui restait un peu obscure dans le cas où l'on ne négligeait pas les déformations élastiques.

Cherchons maintenant ce que deviennent les conditions (8.1)' et (8.2)' lorsqu'on utilise une configuration fixe (0) par rapport à laquelle le tenseur de Kirchhoff est π_0 . On a :

$$\hat{\pi} = (\det \hat{\mathbf{P}})^{-1} \hat{\mathbf{P}} \pi_0 \hat{\mathbf{P}}'. \quad (8.3)$$

Décomposant $\hat{\mathbf{P}}$ sous la forme polaire $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{L}$ ($\hat{\mathbf{Q}}'\hat{\mathbf{Q}} = 1, \mathbf{L}^T = \mathbf{L}$) nous obtenons, à partir de (8.2)' par exemple :

$$\hat{f}(\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{L}\pi_0\mathbf{L}\hat{\mathbf{Q}}'(\det \mathbf{L})^{-1}, T, \hat{\alpha}_j) = 0. \quad (8.4)$$

Dans le cas où il ya a isotropie dans la configuration relâchée actuelle, f est fonction isotrope de $\hat{\pi}$ donc $\hat{\mathbf{Q}}$ disparaît de 8.4 qu'on peut alors mettre sous la forme :

$$g(\pi_0, \Delta_p^0, T, \hat{\alpha}_j) = 0. \quad (8.5)$$

Δ_p^0 désignant le tenseur de Green de la déformation permanente par rapport à la configuration 0 :

$$\mathbf{1} + 2\Delta_p^0 = \mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{L}^2. \quad (8.6)$$

E. H. Lee [3] a proposé pour le cas isotrope une condition du type (8.2)' avec f fonction isotrope de $\hat{\pi}$. A. E. Green et P. M. Naghdi [2] ont proposé pour le cas général une condition du type 8.5. Ils ont remarqué [4], l'accord, dans le cas isotrope, entre la théorie de Lee et leur propre théorie qu'ils estiment générale. En fait, leur justification d'une relation de la forme 8.5 à partir du principe d'objectivité ([2], p. 261) ne tient pas compte des directeurs des microéléments. Elle n'est valable que lorsque le repère directeur subit la même rotation que le macroélément, i.e. dans le cas d'isotropie.

A titre d'exemple, pour un monocristal, la frontière élastique est atteinte lorsque la cission sur un plan de glissement dans la direction de glissement prend une certaine valeur k , qui dépend de l'écroutissage, ce qui se traduit par :

$$\mathbf{m}\pi\mathbf{n} = k(\hat{\alpha}_j, T) \quad (\text{loi de Schmid}) \quad (8.7)$$

\mathbf{m} est le vecteur unitaire de la direction de glissement, \mathbf{n} celui de la normale au plan de glissement, \mathbf{m} et \mathbf{n} sont deux directeurs attachés au réseau atomique. π , \mathbf{m} , \mathbf{n} , $\hat{\alpha}_j$ sont relatifs à la configuration relâchée actuelle.

Passant à la configuration fixe 0, on a :

$$\mathbf{m} = \beta\mathbf{m}_0, \quad \mathbf{n} = \beta\mathbf{n}_0, \quad \pi = (\det \mathbf{L})^{-1} \mathbf{P}\pi_0\mathbf{P}^t$$

β désigne la rotation subie par le réseau atomique. Elle diffère de la rotation \mathbf{Q} subie par le cristal dans la transformation $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{L}$.

La condition 8.7 devient ainsi :

$$\mathbf{m}_0\beta^t\mathbf{Q}\mathbf{L}\pi_0\mathbf{L}\mathbf{Q}^t\beta\mathbf{n}_0 = k(\hat{\alpha}_j, T) \det L.$$

Elle n'est pas de la forme 8.5, ce qui est évidemment dû à l'intervention des vecteurs directeurs. En plus de π_0 et \mathbf{L} (ou Δ_p^0) elle introduit la rotation $\beta^t\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}$ du cristal par rapport au réseau atomique.

9. RELATIONS DE COMPORTEMENT POUR LA TRANSFORMATION VISCOPLASTIQUE

La vitesse de la transformation plastique, rapportée à la configuration relâchée actuelle, soit $(D\mathbf{P}/Dt)\mathbf{P}^{-1}$ ne dépend en fait nullement de la configuration (0) utilisée pour définir \mathbf{P} . Elle ne dépend que des valeurs actuelles des variables π , T , α_j et de leurs vitesses, de ces dernières linéairement.†

A. *Commençons par le cas où il n'y a pas déformations plastiques instantanées*

Alors la vitesse de transformation plastique ne dépend pas des vitesses de π , T , α_j . En utilisant des configurations relâchées isoclines, on peut donc poser :

$$\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{P}}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}(\hat{\pi}, T, \hat{\alpha}_j)H(\hat{G}) \quad (9.1)$$

H désignant la fonction d'Heaviside. La fonction $\hat{\mathbf{A}}$ dépend du repère directeur utilisé.

Il faut définir la variation en fonction de t des variables d'écroutissage α_j . Nous admettrons qu'elles sont déterminées par des équations différentielles :

$$\dot{\alpha}_k = \mathbf{h}_k(\hat{\pi}, T, \hat{\alpha}_j) \quad (9.2)$$

$\hat{\mathbf{h}}_k$ ne s'annule pas nécessairement en même temps que G , puisqu'on n'exclut pas la possibilité de variations des α en l'absence de déformation plastique (radoucissement).

Il faut noter que par 9.1 c'est la vitesse de transformation *toute entière* (9 composantes) par rapport au trièdre directeur qui est déterminée. La partie symétrique donne la vitesse de déformation plastique. La partie antisymétrique donne la vitesse de rotation de l'élément

† $\hat{\mathbf{P}}(t)$ est une fonctionnelle de $\hat{\pi}(\tau)$, $T(\tau)$, ($\tau \leq t$) et éventuellement une fonction des valeurs actuelles $\hat{\pi}(t)$, $T(t)$. En dérivant par rapport à t on obtient une fonction affine des vitesses actuelles.

de matière par rapport au trièdre directeur, ou inversement celle du trièdre directeur par rapport à l'élément de matière. *C'était nécessaire*, puisque les vecteurs directeurs ne subissent pas la même transformation que le macroélément. Le trièdre directeur est un trièdre *caché*; sa position se trouve déterminée d'instant en instant par la propriété précédente.

L'exemple du monocristal illustre clairement ces résultats. Si la déformation plastique d'un monocristal résulte d'un glissement d'amplitude γ suivant un plan atomique de normale \mathbf{n} et dans une direction atomique de vecteur unitaire \mathbf{m} , la vitesse en un point de coordonnées ξ_j dans un trièdre attaché au réseau atomique est donnée par :

$$v_i = \dot{\gamma} m_i n_j \xi_j$$

d'où

$$\dot{\hat{\mathbf{P}}}\hat{\mathbf{P}}^{-1} = \text{grad } \mathbf{v} = \dot{\gamma} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \quad (9.3)$$

($\dot{\gamma}$ fonction de $\hat{\pi}$, T , $\hat{\alpha}_j$). Par rapport au réseau atomique, non seulement la vitesse de déformation, mais aussi la vitesse de rotation dans la transformation plastique sont donc déterminées.

Avec des configurations relâchées κ quelconques, se déduisant des précédentes par une transformation orthogonale $\beta(t)$, les relations précédentes deviennent :

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}(\pi, T, \alpha_j, \beta) H(G) \quad (9.4)$$

$$\frac{D\alpha_k}{Dt} = \mathbf{h}_k(\pi, T, \alpha_j, \beta). \quad (9.5)$$

ces fonctions tensorielles $u(\mathbf{A}, \mathbf{h}_k$ ou G) se déduisant des fonctions correspondantes \hat{u} relatives au trièdre directeur par la relation :

$$u(\pi, T, \alpha_j, \beta) = \beta \hat{u}(\beta' \pi \beta, T, \beta' \alpha_j \beta) \beta' \quad (9.6)$$

et les dérivées D/Dt étant définies par :

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \dot{\mathbf{P}} - \omega_D \mathbf{P} \quad (9.7) \dagger$$

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \dot{\alpha} - \omega_D \alpha + \alpha \omega_D \quad (9.8)$$

où $\omega_D = \dot{\beta} \beta'$.

Bien entendu, seule est définie par 9.4 et 9.5 la transformation par rapport au repère directeur, i.e. $\hat{\mathbf{P}} = \beta' \mathbf{P}$. On ne peut évidemment pas déterminer séparément \mathbf{P} et β . En prenant les parties antisymétriques, notées $\}_{\dots}\{$, des deux membres de 9.4, on obtient, compte-tenu de 9.7 :

$$\omega_p - \dot{\beta} \beta' = \}_{\dots}\{ \mathbf{A} \{$$

où $\omega_p = \}_{\dots}\{ \hat{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} \{$.

Si l'on convient de prendre des configurations relâchées isoclines ($\beta = Cte$), cette équation détermine la vitesse de rotation ω_p dans la transformation plastique. Si au contraire on convient de prendre une configuration relâchée déduite de l'actuelle (contrainte)

† Cf. note (2) de N° 7.

par déformation pure, ω_p est connu et l'équation ci-dessus est une équation différentielle pour $\beta(t)$.†

Supposons que dans une configuration initiale relâchée, la structure de la matière et le champ des contraintes résiduelles à l'intérieur d'un élément soient (au moins statistiquement) isotropes (cela implique que les $\alpha_j(0)$ sont des scalaires ou tenseurs isotropes). Dans ce cas, les fonctions \hat{G} , \hat{A} , \hat{h} ne changent pas lorsqu'on impose à l'élément dans la configuration initiale et par suite dans toutes les configurations relâchées ultérieures (isoclines) une transformation orthogonale, indépendante de t , quelconque. Ce sont donc des fonctions isotropes de π et des α_j . Alors d'après 9.6, G , A , h (repère quelconque) coïncident avec \hat{G} , \hat{A} , \hat{h} donc sont indépendantes de l'orientation β .

Si tous les paramètres α restent des scalaires ou des tenseurs isotropes, G , A , h sont des fonctions isotropes de π . Dans ce cas (écrouissage isotrope) A est un tenseur symétrique et 9.1 montre que la rotation de l'élément par rapport au repère directeur est nulle. Le repère directeur‡ est *corotationnel* à l'élément.

B. Passons au cas où il y a des déformations plastiques instantanées

Elles se produisent lorsque le point π , T atteint la frontière de plasticité instantanée $f = 0$ avec une vitesse dirigée vers les f positif.

Soit λ la vitesse de f lorsqu'il n'y a pas de déformations plastiques instantanées :

$$\lambda = \text{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial \pi} \frac{D\pi}{Dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} + \text{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_k} \mathbf{h}_k^t \right). \quad (9.9)$$

Si $\lambda > 0$ le point π , T reste sur la frontière précédente et l'entraîne (il ne peut pas la franchir puisqu'elle correspond au cas limite de vitesses de déformation infinies).

Si $\lambda < 0$ il revient à l'intérieur du domaine $f < 0$.

Les termes correspondant aux déformations instantanées dans les expressions de $(D\mathbf{P}/Dt)\mathbf{P}^{-1}$ et $D\alpha_k/Dt$ s'annulent donc en même temps que λ . Puisqu'ils sont linéaires par rapport aux vitesses on peut poser :

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}(\pi, T, \alpha_j, \beta) + \lambda \mathbf{B}(\pi, T, \alpha_j, \beta) \quad (9.10)$$

$$\frac{D\alpha_k}{Dt} = \mathbf{h}_k(\pi, T, \alpha_j, \beta) + \lambda \mathbf{l}_k(\pi, T, \alpha_j, \beta) \quad (9.11)$$

si

$$f(\pi, T, \alpha_j, \beta) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geq 0,$$

tandis que 9.4 et 9.5 s'appliquent si $\lambda < 0$ ou $f < 0$.

† Cette équation n'est pas de la forme 9.2, puisque la vitesse de rotation de l'élément y intervient. Il en serait de même pour toute variable cachée dépendant à la fois de l'état interne de l'état interne et de l'orientation. Cette intervention de la vitesse de rotation semble avoir échappé à la plupart des auteurs qui se sont occupés de la définition des systèmes au moyen de variables cachées.

‡ Ici unique, à cause de la condition—paramètres scalaires ou tenseurs isotropes.

La dépendance en β de f , \mathbf{B} , \mathbf{l}_k est toujours exprimée par 9.6. Les fonctions \mathbf{l}_k sont liées entre elles par une relation qui résulte de ce que, si $\lambda > 0$, f reste nul, d'où :

$$\text{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}} \frac{D\boldsymbol{\pi}}{Dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} + \text{tr} \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} (\mathbf{h}_k + \lambda \mathbf{l}_k) \right] = \lambda \left[1 + \text{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \mathbf{l}_k \right) \right] = 0$$

soit :

$$1 + \text{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \mathbf{l}_k \right) = 0. \quad (9.12)$$

La surface $f = 0$ peut présenter des points pyramidaux ou coniques correspondant à l'entrée en jeu simultanée de plusieurs mécanismes non retardés. En un point où se coupent n nappes de la surface on devra dans 9.10, 9.11 faire intervenir n multiplicateurs λ . On aura alors n conditions 9.12.

Avec $\mathbf{A} = 0$ et $\mathbf{h}_k = 0$ on obtient les règles d'écoulement de la plasticité classique, précisées (influence de β et $\boldsymbol{\omega}_p$)† et complétées (partie antisymétrique de 9.10, nécessaire pour déterminer β).

C. Description lagrangienne (configuration de référence fixe)

Introduisant le tenseur de déformation plastique défini par 8.6, on a, en utilisant des configurations relâchées isoclines :

$$\dot{\Delta}_p^0 = \{ \hat{\mathbf{P}} \dot{\hat{\mathbf{P}}} \} = \hat{\mathbf{P}} \{ \dot{\hat{\mathbf{P}}} \hat{\mathbf{P}}^{-1} \} \hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}} \{ \hat{\mathbf{A}} + \lambda \hat{\mathbf{B}} \} \hat{\mathbf{P}} \quad (9.13)$$

$\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ sont des fonctions de $\hat{\boldsymbol{\pi}}$, T , $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j$, où $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ s'exprime par 8.3 en fonction de $\hat{\mathbf{P}}$ et $\boldsymbol{\pi}_0$. En décomposant $\hat{\mathbf{P}}$ sous la forme polaire $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{L}$, on obtient :

$$\dot{\Delta}_p^0 = \mathbf{L} \hat{\mathbf{Q}} \{ \hat{\mathbf{A}} (\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{L}\boldsymbol{\pi}_0\mathbf{L}\hat{\mathbf{Q}}'(\det \mathbf{L})^{-1}, T, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_j) + \lambda \hat{\mathbf{B}} \} \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{L}. \quad (9.14)$$

Cette relation, où $\mathbf{L} = (\mathbf{1} + 2\Delta_p^0)^{\frac{1}{2}}$, ne suffit pas en général pour déterminer Δ_p^0 , parce qu'elle contient la rotation $\hat{\mathbf{Q}}$. On doit lui associer la relation obtenue à partir de la partie antisymétrique (notée }...{) de $\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{P}}^{-1}$,

$$\hat{\mathbf{Q}}' \hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}} \{ \hat{\mathbf{A}} + \lambda \hat{\mathbf{B}} \} \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{L} \dot{\mathbf{L}} \mathbf{L}^{-1}. \quad (9.15)$$

Dans le cas où il y a isotropie dans les configurations relâchées, $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ sont fonctions isotropes de $\hat{\boldsymbol{\pi}}$, donc tenseurs symétriques, donc $\hat{\mathbf{Q}}$ disparaît de 9.14 qu'on peut alors mettre sous la forme :

$$\dot{\Delta}_p^0 = \mathbf{A}'(\boldsymbol{\pi}_0, \Delta_p^0, T, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_j) + \lambda \mathbf{B}'(\boldsymbol{\pi}_0, \Delta_p^0, T, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_j). \quad (9.16)$$

C'est la forme proposée par P. Perzyna [7] dans le cas viscoplastique ($\lambda = 0$), par A. E. Green et P. M. Nagdhi [2] dans le cas de la plasticité classique ($\mathbf{A}' = 0$, $\mathbf{h}_k = 0$). Ces derniers auteurs ont noté [4] que la théorie proposée pour le cas isotrope par E. H. Lee [3] (qui part de la notion de configuration relâchée) était en accord avec leur propre théorie

† La précision la plus intéressante concerne la vitesse de contrainte $D\boldsymbol{\pi}/Dt$ intervenant dans l'expression 9.9 de λ : c'est la vitesse par rapport au trièdre directeur choisi.

qu'ils estiment plus générale. En fait la forme 9.16 n'est valable que dans le cas d'isotropie, toujours pour la même raison (intervention des directeurs).†

A titre d'exemple, pour un monocristal et un seul système de glissement, on obtient, en partant de 9.3, écrite dans le repère directeur constitué par le réseau atomique ($\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$):

$$\dot{\Delta}_p^0 = \hat{\mathbf{P}}' \{ \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{n}_0 \} \hat{\mathbf{P}} \dot{\gamma}(\hat{\pi}, T, \hat{\alpha}_j)$$

où $\hat{\pi}$ est exprimé par 8.3 en fonction de π_0 et $\hat{\mathbf{P}}$. Cette expression est bien de la forme 9.13 mais ne se réduit pas à la forme 9.16.

10. COMPOSITION DES TRANSFORMATIONS PLASTIQUES ET ELASTIQUES

Nous nous bornons ici à résumer les résultats que nous avons exposés dans les références [1].

La transformation élastique \mathbf{E} qui fait passer de la configuration relâchée (κ) à la configuration actuelle (a) étant décomposée sous la forme polaire :

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}\mathbf{S} \quad (\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{1}, \mathbf{S}' = \mathbf{S}).$$

la relation 3.2 donne :

$$\text{grad } \mathbf{v} = \omega_D^1 + \mathbf{R} \frac{D\mathbf{S}}{Dt} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}' + \mathbf{R}\mathbf{S}(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B})\mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}' \quad (10.1)$$

où :

$$\omega_D^1 = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}' + \mathbf{R}\omega_D \mathbf{R}' \quad (10.2)$$

Les trois termes du deuxième membre de 10.1 sont indépendants de la configuration relâchée choisie. ω_D^1 est la vitesse de rotation du trièdre directeur pris dans la configuration relâchée particulière (κ_1) qui se déduit de (κ) par la transformation orthogonale \mathbf{R} ou encore de la configuration actuelle (a) par une déformation pure ($\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}'$).

Si les déformations thermoélastiques sont infiniment petites, on peut poser :

$$\mathbf{S} = (1 + 2\Delta)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{1} + \Delta$$

et négliger Δ vis à vis de $\mathbf{1}$, d'où :

$$\text{grad } \mathbf{v} = \omega_D^1 + \mathbf{R} \frac{D\Delta}{Dt} \mathbf{R}' + \mathbf{R}(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B})\mathbf{R}' \quad (10.3)$$

† *A priori* on peut poser (dans le cas viscoplastique) :

$$\dot{\Delta}_p^0 = f(\pi_0, \mathbf{P}, T, \alpha_j, \beta).$$

β étant la matrice de la transformation orthogonale d'une base formée à partir de 2 directeurs. Le principe d'objectivité réduit simplement cette relation à la forme (équivalente à 9.14) :

$$\dot{\Delta}_p^0 = f(\pi_0, \hat{\mathbf{P}}, T, \hat{\alpha}_j)$$

où :

$$\hat{\mathbf{P}} = \beta' \mathbf{P}, \quad \hat{\alpha}_j = \beta' \alpha_j \beta$$

Le troisième terme ne contenant plus \mathbf{S} , on voit que les vitesses de transformation plastique et élastique et la vitesse de rotation du trièdre directeur, toutes trois évaluées pour la configuration κ_1 , s'additionnent.

La relation 10.3 présente un aspect plus simple lorsqu'on utilise comme configuration de référence, la configuration κ_1 , parce que dans ce cas $\mathbf{R} = \mathbf{1}$ et $\boldsymbol{\pi}$ peut être confondu avec $\boldsymbol{\sigma}$, tenseur des contraintes de Cauchy d'où :

$$\text{grad } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_D^1 + \mathcal{D}_{el}^1 + \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\alpha}_j^1, \boldsymbol{\beta}_1) + \lambda \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\alpha}_j^1, \boldsymbol{\beta}_1) \quad (10.4)$$

\mathcal{D}_{el}^1 désigne la vitesse de déformation élastique par rapport à la configuration κ_1 . Si les coefficients thermoélastiques sont indépendants de l'écroutissage :

$$\Delta^1 = \Lambda_1(T_0, \boldsymbol{\beta}_1)\boldsymbol{\pi}_1 + \mathbf{k}_1(T_0, \boldsymbol{\beta}_1)(T - T_0)$$

$$\mathcal{D}_{el}^1 = \left(\frac{D\Delta^1}{Dt} \right) = \Lambda_1 \left(\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} \right) + \mathbf{k}_1 \dot{T}.$$

Dans le cas général, c'est seulement l'aspect qui est le plus simple ; \mathbf{A} , \mathbf{B} , Λ_1 , \mathbf{k}_1 , sont fonctions de l'orientation $\boldsymbol{\beta}_1$ du trièdre directeur dans la configuration κ_1 . Toutefois s'il y a isotropie dans une configuration initiale non contrainte, les fonctions A , B et les coefficients Λ_1 , \mathbf{k}_1 , ne dépendent pas de β_1 et le choix de la configuration κ_1 comme référence est avantageux.

En séparant dans 10.4 les parties symétrique et antisymétrique, on obtient :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{el}^1 + \{ \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\alpha}_j^1, \boldsymbol{\beta}_1) + \lambda \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\alpha}_j^1, \boldsymbol{\beta}_1) \} \quad (10.5)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_D^1 + \{ \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} \} \quad (10.6)$$

où $\boldsymbol{\omega}_D^1 = \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_1^t$.

$\boldsymbol{\omega}$ désigne la vitesse de rotation de l'élément. S'il y a isotropie dans les configurations relâchées, \mathbf{A} et \mathbf{B} sont de tenseurs symétriques, d'où : $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_D^1$. L'équation 10.6 est nécessaire pour déterminer $\boldsymbol{\beta}_1$.

On doit noter que la relation 10.5 n'est jamais, à elle seule, suffisante, même dans le cas d'isotropie initiale (où \mathbf{A} , \mathbf{B} ne dépendent pas de $\boldsymbol{\beta}_1$), parce que $\boldsymbol{\omega}_D^1$ figure dans \mathcal{D}_{el}^1 et par la dérivée :

$$\left(\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} \right)_1 = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\omega}_D^1 \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega}_D^1$$

où $\boldsymbol{\omega}_D^1$ doit être déduit de 10.6.

La véritable équation de comportement est toujours 10.4 (plus généralement 10.3 ou 10.1). Cet aspect, quelque peu inhabituel, de la relation de comportement d'un milieu élastoplastique est dû à l'intervention des directeurs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. MANDEL, (a) *C.R. Acad. Sc. Paris*—t. 272, pp. 276–279, 1596–1598; t. 273, pp. 44–46 (1970–71). (b) *Plasticité classique et Viscoplasticité*. Cours au Centre International des Sciences Mécaniques, Udine (1971). (c) *Relations de comportement des milieux élastiques–plastiques et élastiques–viscoplastiques*. Symposium sur les fondements de la Plasticité, Varsovie (1972).
- [2] A. E. GREEN et P. M. NAGHDI, A general theory of an elastic–plastic continuum. *Arch. Ration. Mech. Analysis* **18**, 251–281 (1965).
- [3] E. H. LEE, Elastic–plastic deformation at finite strains. *J. appl. Mech.* **36**, 1–6 (1969).
- [4] A. E. GREEN et P. M. NAGHDI, Some remarks on elastic–plastic deformation at finite strain. *Int. J. Eng. Sci.* **9**, 1219–1229 (1971).
- [5] E. COSSERAT et F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*. Hermann (1909).
- [6] E. KRONER, On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics. *Int. J. Eng. Sci.* **1**, 261–278 (1962).
- [7] P. PERZYNA, Thermodynamic theory of Plasticity. *Advances in Applied Mechanics*. **11**, 313–354. Academic Press (1971); Voir aussi P. PERZYNA et W. WOJNO, Thermodynamics of a rate sensitive plastic material. *Arch. Mech. Stosowanej* **20**, 499–511 (1968).

(Received 3 July 1972)

Abstract—The paper is concerned with the structure of the constitutive equations of either an elastic–plastic or an elastic–viscoplastic medium in a finite transformation. As the plastic deformation results from discontinuities of either displacements or rotations between the oriented microelements, some hidden director vectors must be introduced, or equivalently internal hidden variables and a hidden orthonormal triad, the director frame.

In order to decompose the thermoelastic–viscoplastic transformation, a relaxed (or intermediate) configuration is used. An important feature of the theory is that, except in the case of isotropy in the relaxed configurations, the constitutive equations contain not only the stretching tensor, but also the spin relative to the director frame.

Абстракт—В работе исследуется структура уравнений состояния упруго-пластической среды или упруго-вязкопластической, для конечного преобразования. Насколько пластическая деформация является результатом разрывов вследствие перемещений или вращений между ориентированными микроэлементами, нужно ввести некоторые скрытые направленные векторы, или, равносильно, внутренние скрытые переменные и скрытую ортонормальную триаду, для направленной системы.

Используется ослабленная /или промежуточная/ конфигурация, с целью разложения термоупруго-вязкопластического преобразования. За исключением случая изотропии для ослабленных конфигураций, важным признаком этой теории является факт, что уравнения состояния содержат в себе не только тензор растяжения, но также относительный спин к системе направления.